

國立中央大學

統計研究所

碩士論文

加速衰變測試下  $p$  分位失效時間之貝氏估計

研究生：魏郁昇

指導教授：陳玉英 博士

中華民國一百零二年六月



# 國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(101 年 9 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 \_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日開放)

不同意，原因是：\_\_\_\_\_

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

同意 (立即開放)

同意 (請於西元 \_\_\_\_\_年\_\_\_\_月\_\_\_\_日開放)

不同意，原因是：\_\_\_\_\_

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名：\_\_\_\_\_ 魏郁昇 \_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 100225004 \_\_\_\_\_

論文名稱：\_\_\_\_\_ 加速衰變測試下 p 分位失效時間之貝氏估計 \_\_\_\_\_

指導教授姓名：\_\_\_\_\_ 陳玉英 博士 \_\_\_\_\_

系所：\_\_\_\_\_ 統計研究 \_\_\_\_\_ 所  博士班  碩士班

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填聲明書，詳細說明與紙本聲明書請至 <http://thesis.lib.ncu.edu.tw/> 下載。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
4. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

## 摘要

在產品的可靠度研究中，經常針對高可靠度的產品，在更嚴苛的應力條件下，研究其品質特性隨時間經過之衰變，稱為加速衰變測試。在此測試之下，研究者想求知具有 100p% 產品會失效的時間，稱之為 p 分位失效時間。本文在品質特性隨時間變化為偉能(Wiener)或伽瑪(Gamma)隨機過程下，使用貝氏方法估計 p 分位失效時間的下界。本文除了實例分析，也執行模擬研究 p 分位失效時間貝氏估計之優劣。

**關鍵字:**加速衰變測試、p 分位失效時間、偉能隨機過程、伽瑪隨機過程

## Abstract

A study of the reliability of a product with quality characteristics (QC) degraded over time under some more severe stress conditions is called an accelerated degradation test. In this test, the researchers would like to know its  $p$  quantile failure time at which  $100p\%$  of products would reach the threshold value of QC. When the QC varying over time can be described as the Wiener or Gamma stochastic process, we employ the Bayesian method to estimate the lower bound for the  $p$  quantile failure time. In addition to a case analysis, we perform a simulation study to investigate the performance of the proposed Bayesian estimates.

**Key word:** Accelerated degradation test,  $p$  quantile failure time, Wiener process, Gamma process

## 誌 謝

首先誠摯的感謝指導教授 陳玉英博士，在我碩二的這一年中，不留餘力的給予指導以及教導我將自己的得到的結果做一個完整的解釋，並且當我有問題時，也能夠和我一起討論解決的方法，並且不斷地的給予我撰寫論文的方向和想法，同時也要感謝口試委員稽允嬋博士，以及樊采虹博士耐心的審閱與指導，讓我的論文更臻完整。

在碩士論文方面，非常感謝博士班林文明學長不厭其煩地幫我解決論文上的問題，以及提供解決問題的方向與報告的技巧，讓我增長不少見聞，也感謝所辦小姐在口試當天，幫助我拾回重要的隨身碟。在碩士生活中，感謝戰友光頭潘常常提供我報告上的盲點以及生活上突發的笑點，再來感謝常常討論課業上問題的仕凱、龍哥，以及、為了全碩二盡心盡力付出的萬年班代泰哥，亦感謝勤奮管理電腦室的翔豪小開、露出莫名傻笑的熱心大個、以及常常來電腦室製造快樂笑聲的偉哥、阿崙、小米、小侯、小唯，以及俊為。讓我在跑程式以及寫論文的艱困迴圈生活中，獲得了很大的舒緩壓力效果以及增添在碩班求學中的美好回憶，也再次的感謝中央統計研究所的各位同學們、文明學長和陳玉英 老師，最後特別感謝我的家人和正妹阿蓉一路上的支持與體諒，由衷的謝謝

大家，我愛你們!!

魏郁昇 謹致於

國立中央大學統計研究所

中華民國一百零二年七月

# 目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	v
圖目次	vii
表目次	viii
第一章 研究動機及目的	1
第二章 文獻回顧	5
第三章 p 分位失效時間的估計	8
3.1 偉能隨機過程.....	8
3.2 伽瑪隨機過程.....	11
第四章 模擬研究	14
4.1 模擬方法.....	14
4.2 模擬結果.....	17
第五章 實例分析	20

第六章 結論與未來方向	26
參考文獻	28
附錄	31



## 圖目錄

圖 1 產品品質特性的衰變.....	3
圖 2 偉能隨機過程下之 $t_p$ 後驗分布.....	17
圖 3 伽瑪隨機過程下之 $t_p$ 後驗分布.....	18
圖 4 在偉能隨機過程下各種 $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t$ 所對應的貝氏估計 $\tilde{t}_{0.01}^W$ ...	23
圖 5 在伽瑪隨機過程下各種 $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t$ 所對應的貝氏估計 $\tilde{t}_{0.01}^G$ ...	24

## 表目錄

表一 偉能隨機過程下的資料分析.....	32
表二 伽瑪隨機過程下的資料分析.....	32
表三 3 個應力水準偉能隨機過程之下， $t_p$ 評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$ 或者 $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率.....	33
表四 2 個應力水準偉能隨機過程之下， $t_p$ 評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$ 或者 $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率.....	34
表五 3 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$ 評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$ 或者 $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率.....	35
表六 2 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$ 評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$ 或者 $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率.....	36
表七 3 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$ 評估的偏誤和均方差及真值與區間或	

可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋  
率.....37

表八 2 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或

可信下界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋  
率.....38

# 第一章 研究動機及目的

隨著科技的發展及顧客對產品的要求，製造業開始注重產品的品質，並且希望產品在正常狀況下，能夠延長使用的時間。產品在某一段特定時間內能夠正常運作的機率，稱為產品可靠度(Reliability)。產品可靠度是評估產品品質的一個重要的課題。

高可靠度產品在正常情況下，需要較長的時間才能觀察到失敗的資訊。為能及早觀察到足夠的資料以評估產品的可靠度，一般使用加速壽命試驗(Accelerated Life Test，簡記為 ALT)收集有關產品失效時間或壽命的訊息。加速壽命試驗是指實驗者選擇一個或多個可控制的有效環境應力(Environmental stress)，如溫度、濕度、電壓等，將產品置於比正常使用條件較嚴苛的環境應力中，觀察產品壽命。在此一試驗之下，可以在較短時間內觀察到較多的產品壽命，但是，這種方法對於評估在試驗時間內不易失敗的高可靠度產品壽命的幫助仍然是有限的。

另一種方法是加速衰變試驗(Accelerated Degradation Test，簡記為 ADT)，因為產品品質特性會隨著使用時間經過而衰變，並且此一衰變與產品失效有相關。假設品質特性因衰變以至於無法正常使用的門閥值(Threshold value)為  $y_f$ ，而且產品品質特性高於或低於  $y_f$  時該產品已經失效或失敗。為了縮短試驗時間，會將產品置於比正常

使用條件較嚴苛的環境應力中，觀測產品隨著時間經過衰變的品質特性。根據研究中在不同的環境應力加速水準之下，產品品質特性的衰變反應，建立品質特性隨應力及時間改變的模式，然後使用外插法推導產品在正常使用情況下的品質特性衰變。一般而言，加速衰變試驗比加速壽命試驗更能夠有效的減短試驗時間，也更能夠提供產品失效時間的訊息。

令  $Y(t)$  為產品使用  $t$  時間時，產品的品質特性。假設產品品質特性反應值越高代表產品品質越差，則產品品質特性高於  $y_f$  時，產品即為失效(圖一左)。令  $T$  為產品品質特性第一次抵達門閾值  $y_f$  的使用時間，則  $p$  分位的失效時間，記為  $t_p$ ，滿足下式：

$$p = P(T < t_p) = P(Y(t_p) > y_f) \quad , \quad (1.1)$$

其中  $0 < p < 1$ 。實務中  $p$  經常為 0.01 或 0.05。亦即經過  $t_p$  的使用時間時，有  $100 \times p\%$  的產品會失效。參數  $t_p$  的估計是一個重要的問題，因為它提供產品有效使用時間的資訊。若產品品質特性反應值越低代表產品品質越差 (圖一右)，則  $p$  分位的失效時間為

$$p = P(T < t_p) = P(Y(t_p) < y_f) \quad \circ \quad (1.2)$$

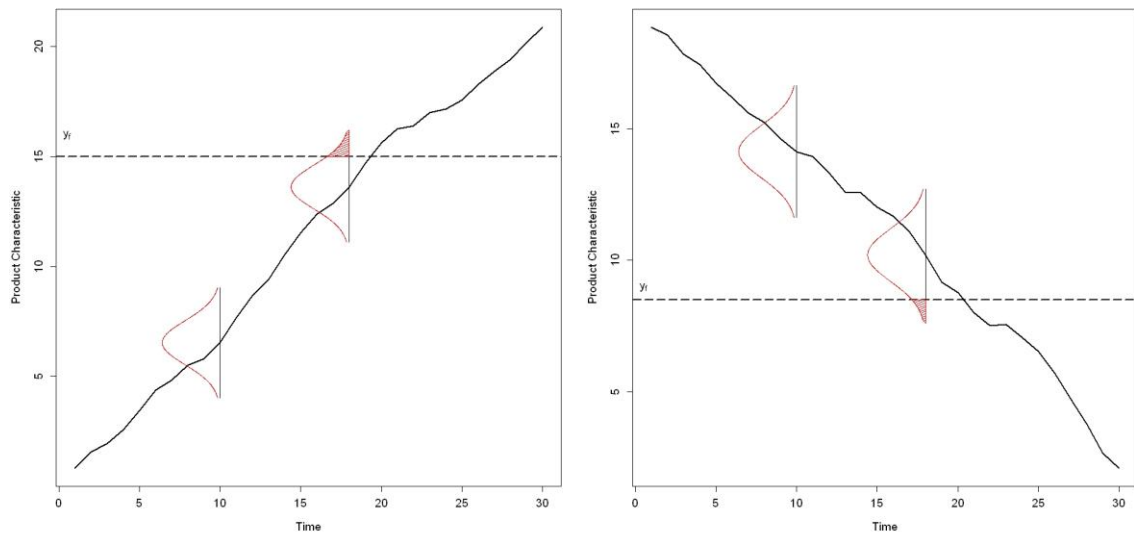


圖 1:產品品質特性的衰變

一般在加速衰變試驗中，產品的品質特性會隨使用時間經過有所變化，所以，經常使用隨機過程描繪此一產品特性反應值。文獻已有學者用偉能隨機過程(Wiener process) (Whitmore and Schenkelberg, 1997)及伽瑪隨機過程(Gamma process) (Park and Padgett, 2005)描述加速衰變試驗中產品品質特性隨時間變化的過程。

Whitmore 與 Schenkelberg (1997)在偉能隨機過程之下，對時間分別做指數與級數的轉換，並且在每一個研究中的應力水準下，根據每一個物件的衰變品質特性，求出相關參數的最大概似估計。接著採用最小平方法，配適出應力與參數的線性關係。

Park and Padgett (2005)在品質特性增量為正的情形下，考慮用伽瑪隨機過程描述此一增量隨時間的變化，並且也推導出第一次抵達品質特性門閾值時間隨機變數  $T$  的分布，但是該分布十分複雜，因此該作者建議一個近似的  $p$  分位失效時間，並且評

估此一近似的方法與真值的誤差。

由於實務中產品不斷地推陳出新，新一代的產品經常是改良前一代產品或者附加新功能，因此，在評估新一代產品的可靠度時，經常具有前一代的測試資料作為新一代產品的先驗資訊或先驗分布(Prior distribution)。為了能自新一代產品測試的少量樣本中，獲得更多的資訊。考文考慮應用貝氏方法(Bayesian method)，根據現行測試資料調整上述的先驗分布，獲得新一代產品品質特性的後驗分布(Posterior distribution)，然後根據獲得 $t_p$ 的貝氏估計。本文進一步求出 $t_p$ 的 $100(1-\alpha)\%$ 可信下界(Credible lower bound)提供產品的保證有效使用時間。

本文第二章回顧文獻中針對加速衰變試驗下的偉能隨機過程和伽瑪隨機過程的品質特性，有關參數 $t_p$ 的最大概似估計式。第三章在加速衰變試驗下，就不同的品質特性之先驗分布，利用貝氏方法求出 p 分位失效時間的後驗平均數或中位數及其可信下界。第四章則是在不同隨機過程假設之下進行模擬研究。第五章使用一筆加速衰變測試資料來說明第三章所提的應用。

## 第二章 文獻回顧

令某一產品隨著時間經過衰變的品質特性為  $\{Y(t), t \geq 0\}$ 。假設其服從偉能隨機過程，則

(1)  $Y(0)=y_0$ ，即  $y_0$  為起始值，

(2)  $Y(t)$  有獨立增量；即  $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  則  $Y(t_2)-Y(t_1)$  和  $Y(t_4)-Y(t_3)$  獨立，

(3)  $Y(t+\Delta t)-Y(t)$  服從常態分布，其平均數為  $\mu\Delta t$ ，變異數為  $\sigma^2\Delta t$ 。

Whitmore and Schenkelberg(1997)在偉能隨機過程假設下，考慮衰變模型為

$$Y(t) = y_0 + \mu t + \sigma B(t)$$

其中  $y_0$  是產品在時間 0 的平均品質特性， $B(t)$  是平均數為 0，變異數為  $t$  的標準布朗運動，(簡記為  $B(t) \sim N(0, t)$ )， $\mu$  為一與應力或時間無關的位移係數(Location coefficient)以及  $\sigma$  為擴散係數(Diffusion coefficient)，在此一模型下，沒有應力的訊息，Whitmore and Schenkelberg (1997)分別針對品質特性及時間做指數與次方的轉換，並且在轉換後的品質特性與應力及轉換時間為線性關係的假設之下，依據每個的應力水準下的每一個產品衰變的品質特性，估計平均特性的最大概似估計，再用最



小平方法找出應力與品質特性的線性關係。令  $y_f$  為產品失效的門閾值，亦即當產品品質特性衰變至  $y_f$  時，就判定該產品已經失效或失敗。

根據 Chhikara and Folks (1989) 的研究，在偉能隨機過程下，可藉由公式(1.1) 或(1.2) 求出產品品質特性的  $p$  分位失效時間  $t_p$ 。因為第一次抵達失效門閾值  $y_f$  的時間隨機變數  $T$  服從逆高斯分布 (Inverse Gaussian distribution)，其機率密度函數(pdf) 為

$$f(t; \mu^*, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^{*2}t}(t - \mu^*)^2\right\}, \quad t > 0$$

對應的分布函數(cdf) 為

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu^*} - 1\right)\right) + \exp\left\{\frac{2\lambda}{\mu^*}\right\} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\left(\frac{t}{\mu^*} + 1\right)\right), \quad t > 0 \quad (2.1)$$

其中  $\mu^* = (y_f - y_0)/\mu$ ， $\lambda = (y_f - y_0)^2/\sigma^2$ 。若是產品品質特性逐時增加，則可以藉由公式(1.1) 求出  $t_p$ ，若是產品品質特性逐時減少，則可以藉由公式(1.2) 求出  $t_p$ ；但是必須修正  $\mu^* = -(y_f - y_0)/\mu$ 。

Park and Padgett (2005) 討論產品品質特性之衰變過程為伽瑪隨機過程的情形，因為產品品質只會隨著時間的使用而越來越差，不可能回復到與先前使用一樣的條件。下列為伽瑪隨機過程性質：

(1)  $Y(0)=0$

(2)  $Y(t)$ 有獨立增量；即  $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  則  $Y(t_2)-Y(t_1)$  和  $Y(t_4)-Y(t_3)$  獨立

(3)  $Y(t+\Delta t)-Y(t)$ 服從伽瑪分布，其形狀參數(shape)為  $\alpha\Delta t$ ，尺度參數(scale)為  $\beta$

因此，品質特性增量之分布為伽瑪分布，記作  $\Delta y \sim \Gamma(\alpha\Delta t, \beta)$ 。當產品品質特性反應值越高產品品質越差時， $t_p$  可以由下式解出

$$\begin{aligned} p &= P(T < t_p) = P(Y(t_p) > y_f) = P(Y(t_p) - y_0 > y_f - y_0) \\ &= \int_{y_f - y_0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha t) \beta^{\alpha t}} y^{\alpha t - 1} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 第三章 p 分位失效時間的估計

本章考慮具有  $S$  個應力水準的加速衰變試驗，在每一個應力水準之下分別有  $J$  個產品接受測試，然後，逐時測得其衰變中的品質特性。令  $y_{ijk}$  為在應力水準  $i$  之下的第  $j$  個物件在第  $k$  個時間點 ( $t_{ijk}$ ) 的品質特性反應量，其中  $i=1, 2, \dots, S$ ， $j=1, 2, \dots, J$ ， $k=1, 2, \dots, K_i$ 。本章將在衰變品質特性分別為偉能及伽瑪隨機過程之下，討論其  $p$  分位失效時間的貝氏估計。

#### 3.1 偉能隨機過程

Nelson(1990)認為工業產品的衰變趨勢與溫度的關係，可以由阿瑞尼斯 (Arrhenius) 的方程式加以解釋，其中  $\varphi(s_i) = (1/s_i - 1/s_M) / (1/s_0 - 1/s_M)$  將應力轉換成一個在  $(0, 1)$  之間的數字，藉此方便估計  $\beta_0$  和  $\beta_1$  (Lim and Yum, 2011)。所以，Nelson (1990)建議考慮衰變品質特性之模式為一偉能隨機過程，則

$$Y(t_{ijk}) = y_0 + d(s_i)t_{ijk} + \sigma B(t_{ijk})$$

其反應值增量  $\Delta y_{ijk} = y_{ijk} - y_{ij(k-1)}$  服從平均數為  $d(s_i)\Delta t_{ijk}$  且變異數為  $\sigma^2\Delta t_{ijk}$  的常態分布，簡記為  $\Delta y_{ijk} \sim N(d(s_i)\Delta t_{ijk}, \sigma^2\Delta t_{ijk})$ ，其中  $\Delta t_{ijk} = t_{ijk} - t_{ij(k-1)}$ 、以及  $d(s_i) = \exp(\beta_0 + \beta_1\varphi(s_i))$ 。

令  $\theta = (\beta_0, \beta_1, \sigma)^t$ ，因此， $\Delta y_{ijk}$  之機率密度函數為

$$f(\Delta y_{ijk} | \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t_{ijk}}} \exp\left\{-\frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}}\right\}, \quad -\infty < \Delta y_{ijk} < \infty$$

所以，參數向量  $\theta$  的概似函數(likelihood function)為

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^{k_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t_{ijk}}} \exp\left\{-\frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}}\right\}, \quad -\infty < \Delta y_{ijk} < \infty, \quad ,$$

其自然對數概似函數(log-likelihood function)為

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{k_i} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\Delta t_{ijk}) - \ln(n\sigma) - \frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}} \right\} \quad .$$

對應的估計方程組為

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{k_i} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\Delta t_{ijk}) - \ln(\sigma) - \frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}} \right\} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{k_i} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\Delta t_{ijk}) - \ln(\sigma) - \frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}} \right\} = 0 \quad ,$$

和

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{k_i} \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi\Delta t_{ijk}) - \ln(\sigma) - \frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i)\Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2\Delta t_{ijk}} \right\} = 0 \quad .$$

若對參數  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  及  $\sigma$  進行第二次偏微分，便可得到海森矩陣 (Hessian matrix)，

代入估計方程組的解，求出其行列式值(Determinant)是小於零，則上述解即為參數的最大概似估值，簡記為 MLE。

將上述的 MLE 代入公式(2.1)，其中  $\mu = d(s_i)$ ，就可以估計在第  $i$  個應力之下的  $p$  分位的失效時間，但是本文有興趣的是在正常使用下(亦即  $s_0$ )的  $p$  分位的失效時間，記作  $t_p^W$ 。令  $\hat{t}_p^W$  為  $t_p^W$  的最大概似估計。因為，產品的保證使用期限更為重要，而且  $t_p^W$  為非負的參數，本文將使用自助法抽樣(Bootstrap sampling)100 次，求得  $\log \hat{t}_p^W$  的標準差。藉由對數轉換(Log transformation)，得到  $t_p^W$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴下界，簡記為

$$\hat{t}_{p,L}^W = \hat{t}_p^W \exp\left(z_{1-\alpha} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\ln \hat{t}_p^W)}\right)。$$

假設根據先前類似產品測試結果，得到  $(\beta_0, \beta_1)^t$  的先驗分布為二維常態分布，簡記為

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2}\right) \text{ 互相獨立}$$

$$\text{其中 } \Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 & \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} \\ \rho \sigma_{\beta_0} \sigma_{\beta_1} & \sigma_{\beta_1}^2 \end{bmatrix}。$$

而  $\sigma^2$  的先驗分布為形狀參數(shape parameter)為  $\alpha$ ，尺度參數(scale parameter)為  $\beta$  的逆伽瑪分布(Inverse gamma distribution)，並且  $(\beta_0, \beta_1)^t$  與  $\sigma^2$  互相獨立。因此， $\theta$  的後驗分布為

$$\pi(\underline{\theta} | \Delta \underline{y}) \propto f(\Delta \underline{y} | \underline{\theta}) \pi(\underline{\theta})$$

$$\propto \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^{k_i} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[\Delta y_{ijk} - d(s_i) \Delta t_{ijk}]^2}{2\sigma^2 \Delta t_{ijk}} \right\} \pi_1(\beta_0, \beta_1) \pi_2(\sigma^2)$$

由於後驗分布相當複雜，因此本文在設定的先驗分布及概似函數之下，使用 Winbugs[10]，應用蒙地卡羅-馬可夫演算法(MCMC)或 Gibbs sampling 演算法生成來自後驗分布的  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  和  $\sigma^2$  的值。將這些參數值代入公式(2.1)求得來自該後驗分布的  $t_{p,(1)} \leq t_{p,(2)} \leq \dots \leq t_{p,(N-1)} \leq t_{p,(N)}$ ，將這些從後驗分布得到的  $t_p$  加總並且取其平均即為貝氏估計，簡記為  $\tilde{t}_p^W = \sum_{i=1}^N t_{p,(i)} / N$ ，進一步也可以得到  $(1-\alpha)100\%$  貝氏可信下界，簡記為  $\tilde{t}_{p,L}^W = \tilde{t}_{p,([N\alpha])}$ ，其中  $[N\alpha]$  為最小或等於  $N\alpha$  的最大整數。

### 3.2 伽瑪隨機過程

當品質特性反應值增量  $\Delta y_{ijk}$  會服從伽瑪分布，形狀參數為  $d(s_i) \Delta t_{ijk}$ 、比率參數 (rate parameter) 為  $\eta$  (亦即  $\Delta y_{ijk} \sim \text{Gamma}(d(s_i) \Delta t_{ijk}, \eta)$ )。令  $\underline{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \eta)$ ，其機率密度函數為

$$f(\Delta y_{ijk} | \underline{\theta}) = \frac{\eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}}}{\Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk})} (\Delta y_{ijk})^{d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1} \exp\{-\Delta y_{ijk} \eta\}, \Delta y_{ijk} > 0$$

由上式可知其概似函數為

$$L(\Delta y_{ijk} | \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^{k_i} \frac{\eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}}}{\Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk})} (\Delta y_{ijk})^{d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1} \exp\{-\Delta y_{ijk} \eta\}, \Delta y_{ijk} > 0$$

對應的自然對數概似函數為

$$l(\Delta y_{ijk} | \theta) = \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^{k_i} \left\{ -\ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) + \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} + (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln(\Delta y_{ijk}) - \Delta y_{ijk} \eta \right\} \quad \circ$$

可以得到估計方程組為

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta_0} l(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_0} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_i} \left\{ -\ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) + \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} + (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln(\Delta y_{ijk}) - \Delta y_{ijk} \eta \right\} = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta_1} l(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_i} \left\{ -\ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) + \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} + (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln(\Delta y_{ijk}) - \Delta y_{ijk} \eta \right\} = 0 \quad , \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} l(\Delta y_{ijk} | \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{K_i} \left\{ -\ln \Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk}) + \ln \eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}} + (d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1) \ln(\Delta y_{ijk}) - \Delta y_{ijk} \eta \right\} = 0 \quad \circ \end{aligned}$$

若對參數  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  及  $\eta$  進行第二次偏微分，便可得到海森矩陣，代入估計方程組的

解，求出其行列式值是小於零，則上述解即為參數的 MLE。

根據上述參數的最大概似估計代入公式(2.2)，其中  $\beta = 1/\eta$ ，就可以估計在第  $i$  個應力之下的  $p$  分位的失效時間。但是本文有興趣的是在正常使用下(亦即  $s_0$ )的  $p$  分位的失效時間，記作  $t_p^G$ 。令  $\hat{t}_p^G$  為  $t_p^G$  的最大概似估計。因為產品的保證使用期限更為重

要，而且  $t_p^G$  為非負的參數，本文將使用自助抽樣法(Bootstrap sampling)100 次，先求得  $\log \hat{t}_p^G$  的標準差。藉由對數轉換(Log transformation)，得到  $t_p^G$  的  $100(1-\alpha)\%$  信賴下界，簡記為

$$\hat{t}_{p,L}^G = \hat{t}_p^G \exp\left(z_{1-\alpha} \sqrt{\hat{\text{var}}(\ln \hat{t}_p^G)}\right)$$

假設根據先前類似產品測試結果，得到  $(\beta_0, \beta_1)^t$  的先驗分布為二維常態分布，簡記為

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t, \Sigma_{2 \times 2}\right) \text{ 互相獨立}$$

$$\text{以及 } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \rho \sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2} \\ \rho \sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{bmatrix} \text{。}$$

有關  $\eta$  的先驗分布為形狀參數  $\alpha$ ，比率參數  $\beta$  的伽瑪分布，並且  $(\beta_0, \beta_1)^t$  與  $\eta$  互相獨立。

因此， $\theta$  的後驗分布為

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \Delta y) &\propto f(\Delta y_{ijk} | \theta) \pi(\theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^S \prod_{j=1}^I \prod_{k=1}^{k_i} \frac{\eta^{d(s_i) \Delta t_{ijk}}}{\Gamma(d(s_i) \Delta t_{ijk})} (\Delta y_{ijk})^{d(s_i) \Delta t_{ijk} - 1} \exp\{-\Delta y_{ijk} \eta\} \cdot \pi_1(\beta_0, \beta_1) \pi_2(\eta) \end{aligned}$$

將這些參數值代入公式(2.2)求得來自該後驗分布的  $t_{p,(1)} \leq t_{p,(2)} \leq \dots \leq t_{p,(N-1)} \leq t_{p,(N)}$ 。

之後將這些從後驗分布得到的  $t_p$  加總並且取其平均即為貝氏估計，簡記為

$$\tilde{t}_p^G = \sum_{i=1}^N t_{p,(i)} / N, \text{ 進一步也可以得到 } (1-\alpha)100\% \text{ 貝氏可信下界, 簡記為 } \tilde{t}_{p,L}^G = \tilde{t}_{p,([N\alpha])}, \text{ 其}$$

中  $[N\alpha]$  為最小或等於  $N\alpha$  的最大整數。



## 第四章 模擬研究

### 4.1 模擬方法

本章利用模擬研究探討在不同的隨機過程假設之下， $p$  分位的失效時間( $t_p$ )的估計偏誤(Bias)及均方誤差(MSE)，也探討對應的信賴下界與可信下界的覆蓋機率。因此，根據第五章實例分析所使用的一筆自動調節加熱電纜資料的加速衰變試驗，分別在偉能過程

$$\Delta y_{ijk} \sim N\left(\exp(\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)) \Delta t_{ijk}, \sigma^2 \Delta t_{ijk}\right)$$

和伽瑪過程

$$\Delta y_{ijk} \sim \text{Gamma}\left(\exp(\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)) \Delta t_{ijk}, \eta\right)$$

之下生成資料。針對偉能隨機過程，假設先驗分布分別為

方案 W1 ( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 2.245 & 0 \\ 0 & 2.471 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(8.976, 0.068)$$

方案 W2 ( $\rho=-0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 2.245 & -2.120 \\ -2.120 & 2.471 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(8.976, 0.068)$$

針對伽瑪隨機過程，假設先驗分布

方案 G1 ( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-1.179, 3.142)^t, \begin{bmatrix} 0.470 & 0 \\ 0 & 0.850 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim Gamma(5.484, 1.008)$$

方案 G2 ( $\rho = -0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(-1.179, 3.142\right)^t, \begin{bmatrix} 0.470 & -0.570 \\ -0.570 & 0.850 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim \text{Gamma}(5.484, 1.008)$$

先利用資料配適各自的模式，將參數的 MLE 視為真值，再從上述配適的模式之下生成資料。本研究中考慮衰變品質特性之增量的變異數由小至大，在偉能隨機過程下的  $\sigma^2 = 0.081$ 、 $0.092$  或  $0.103$ ，而在伽瑪隨機過程下的  $\eta = 6.873$ 、 $5.437$  或  $3.996$ ，並且  $J = 5$  或  $10$ ，應力條件  $S = 2$  或  $3$ （當  $S = 2$  時，保留最高應力和最低應力的情況）。將上述 MLE 當成先驗分布的平均數(Prior mean)，其變異數則是 10 倍的該 MLE 的變異數。另外，考慮的先驗分布中  $(\beta_0, \beta_1)$  的相關係數為 0 或  $-0.9$ 。

本模擬研究重複次數為 1000 次，估計 0.01 分位失效時間( $t_{0.01}$ )，並且求出  $t_{0.01}$  的 95%信賴及可信下界。其模擬得到的偏誤、均方誤差、覆蓋率和距離都會展示於 4.2 節，其中偏誤為  $E[\hat{t}_{0.01} - t_{0.01}]$  或  $E[\tilde{t}_{0.01} - t_{0.01}]$ 、均方誤差為  $E[\hat{t}_{0.01} - t_{0.01}]^2$  或  $E[\tilde{t}_{0.01} - t_{0.01}]^2$ 、距離為  $E[t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}]$  或者  $E[t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}]$ 。

## 4.2 模擬結果

### 偉能隨機過程

由於圖二所示在伽瑪分布的 0.01 分位失效時間不是個對稱的分布，在這邊使用平均數適合理的。從表 3 至表 4 結果顯示當產品的變異數增加時，會使得 MSE 也跟著下降。這是因為變異數的增加，會造成  $t_{0.01}$  下降，而越高的  $t_{0.01}$  值是需要更大的變異數，才能使得覆蓋機率達到 95%。而且隨著物件個數的上升，確實能夠有效的改善偏誤、均方誤差及距離。另外，使用 MLE 方法會使得 95% 的覆蓋機率不足，但是貝氏估計較能夠維持 95% 的覆蓋機率，尤其在樣本數少的時候，顯示貝氏估計效果是較佳。

依據表 3 的結果，在應力水準為  $S=3$  的情況時，得知貝氏估計比 MLE 具有較小的偏誤及均方誤差。表 4 的結果顯示，當應力水準  $S=2$  時，貝式估計與 MLE 偏誤和均方誤差的相對表現與  $S=3$  情形一致，但是這些評估直接比  $S=3$  情形時大。這說明應力水準仍需要多個，以便能獲得較佳的  $t_p$  估計。

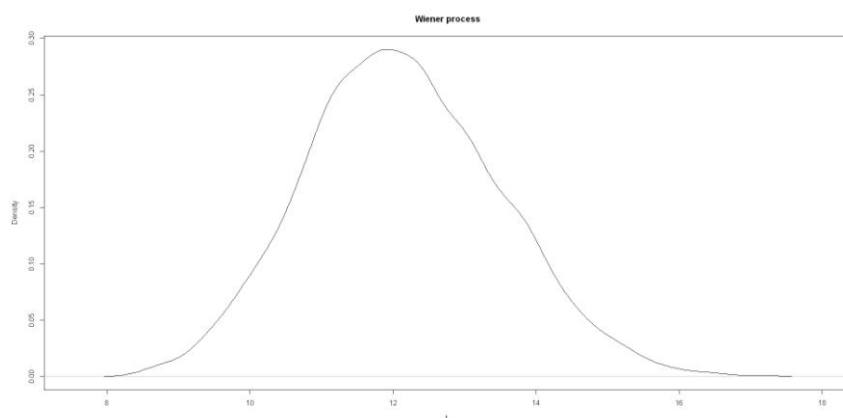


圖 2 伽瑪隨機過程下之  $t_p$  後驗分布

## 伽瑪隨機過程

從表 5 至表 8 的結果顯示當產品的變異數增加時，會使得 MSE 也跟著下降。這是因為變異數的增加，會造成  $t_{0.01}$  下降，而越高的  $t_{0.01}$  值是需要更大的變異數，才能使得覆蓋機率達到 95%。而且隨著物件個數的上升，確實能夠有效的改善偏誤、均方誤差及距離。由於圖三所示在伽瑪分布的 0.01 分位失效時間不是個對稱的分布，在這邊使用平均數的方法常常會被較極端值影響，因此從表 5 和表 6 用後驗分布的平均數估計  $t_p$ ，則會導致估計的偏誤、均方誤差都顯得較差。因此，為了解決非對稱分布的影響，就使用後驗分布的中位數(Median)估計  $t_p$ 。表 7 和表 8 的模擬結果顯示，使用貝氏方法確實能夠改善偏誤以及均方誤差，其可信下限也能維持 95% 的覆蓋率，尤其在樣本數少的时候，顯示貝氏估計效果較佳。

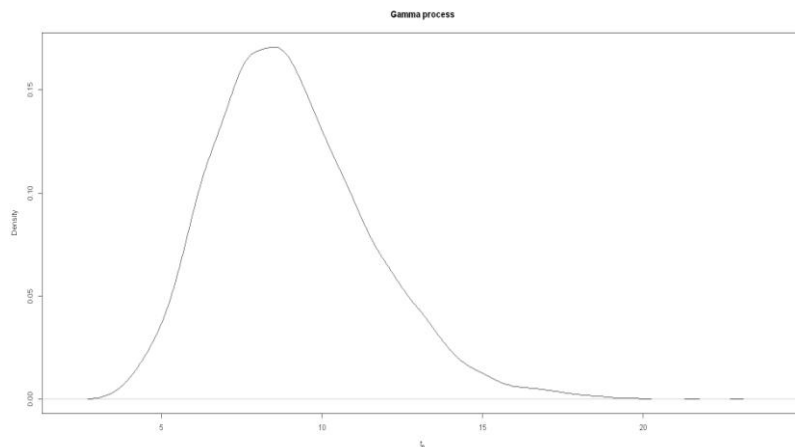


圖 3 伽瑪隨機過程下之  $t_p$  後驗分布

依據表 7 的結果，在應力水準為  $S=3$  的情況時，得知貝氏估計比 MLE 具有較小的偏誤及均方誤差。表 8 的結果顯示，當應力水準  $S=2$  時，貝式估計與 MLE 偏誤和均方誤差的相對表現與  $S=3$  情形一致，但是這些評估直接比  $S=3$  情形時大。這說明應力水準仍需要多個，以便能獲得較佳的  $t_p$  估計。

## 第五章 實例分析

本文使用一筆加速衰變的測試資料(Whitmore and Schenkelberg, 1997)說明第三章所提貝氏估計的應用。此一加速衰變測試研究的是自動調節加熱電纜(Self-regular heating cable)的  $p$  分位失效時間( $t_p$ )。隨著使用時間的增加，電纜表面逐漸氧化，使得電纜的電阻上升，就電功率公式 ( $P=IV=V^2/R$ )而言，在電壓( $V$ )不變之下，若電阻( $R$ )上升，會造成電功率( $P$ )下降，所以，電流( $I$ )也下降進而造成該電纜無法加熱至應有的溫度水準，就會被判定失效。

上述資料中，有三個不同的溫度應力，在每一個應力下，有五個物件進行加速衰變測試，並且每一個物件都在相同的時間點量測，但是不同應力下量測的時間點會有所不同。另外，在溫度為 240 度(攝氏)下，第五個物件的最後一個時間點，出現了一個遺失值(Missing value)，該篇作者的解釋這個遺失值是在測試中，因為固定裝置脫落，所以，無法量測到該產品的品質特性。本文為了方便計算，使用其他四個物件的平均數加以補值。

首先考慮模式  $Y(t_{ijk}) = y_0 + d(s_i)t_{ijk} + \sigma B(t_{ijk})$ ，其中  $i=1, 2, 3$ ； $j=1, 2, \dots, 5$ ； $k=1, 2, \dots, n_i$ 。其中  $d(s_i) = \exp[\beta_0 + \beta_1 \varphi(s_i)]$ 。若應力為溫度(攝氏)， $s_0$  為正常運作的溫

度， $s_M$  是該產品能夠忍受的最大溫度，而  $s_i$  是試驗之中的應力，並且需要將應力  $s_i$  轉換從攝氏溫度至絕對溫度。

## 5.1 偉能過程

根據先前描述，在偉能隨機過程之下，品質特性在  $\Delta t$  時間內的為增量  $\Delta y$ 。利用本文第三章介紹使用最大概似估計和貝氏估計法，分別求出該產品  $t_{0.01}$  的點估計和可信下界。就偉能過程而言， $\theta = (\beta_0, \beta_1, \sigma)$  的 MLE 為  $(-6.236, 5.964, 0.092)$ ，對應的 p 分位失效時間之 MLE 為  $\hat{t}_{0.01}^W = 11.884$ ，藉由自助法估計  $\hat{t}_{0.01}^W$  的標準差為 1.200，因此可得  $t_{0.01}$  的 95% 的信賴下界為 9.909，亦即有 95% 的信心可以保證該產品在正常使用 9.909 (千小時)，約略 1.1 年，會有 1% 的產品將無法達到應有的輸出水準。

由於從資料中的變異數共變數矩陣 (Variance-Covariance matrix) 顯示  $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$  兩者之間的相關係數為 -0.9，在此一資料分析中，考慮  $(\beta_0, \beta_1)^t$  先驗分布的相關係數為 0 或 -0.9。假設先驗分布的假設分別為  $(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1}\right)^t, \Sigma\right)$  及  $\sigma^2 \sim IGamma(\alpha, \beta)$ ，本章將在下列四種方案中，分別探討貝氏估計  $\tilde{t}_{0.01}^W$  及其可信下界  $\tilde{t}_{0.01,L}^W$ 。



方案 1( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 0.225 & 0 \\ 0 & 0.247 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(71.756, 0.599)$$

方案 2( $\rho=-0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 0.225 & -0.212 \\ -0.212 & 0.247 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(71.756, 0.599)$$

方案 3( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 2.245 & 0 \\ 0 & 2.471 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(8.976, 0.068)$$

方案 4( $\rho=-0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-6.236, 5.694)^t, \begin{bmatrix} 2.245 & -2.120 \\ -2.120 & 2.471 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sigma^2 \sim IGamma(8.976, 0.068)$$

由表 1 的分析結果得知，當  $Corr(\beta_0, \beta_1) = -0.9$  時，其 DIC 與  $Corr(\beta_0, \beta_1) = 0$  的情形下相仿，因為多一個參數反而增加了計算上的麻煩。此外，貝氏估計的  $\tilde{t}_{0.01}^W$  皆小於  $\hat{t}_{0.01}^W = 11.884$ 。因此貝氏方法之下對應產品的保證使用時間傾向保守，但是，還可能是 MLE 所低估的變異數使然。在圖四所示，左圖為  $Corr(\beta_0, \beta_1) = 0$  及右圖為  $Corr(\beta_0, \beta_1) = -0.9$  都可以得知，當先驗分布的平均數怎麼調整都會是低估的結果。

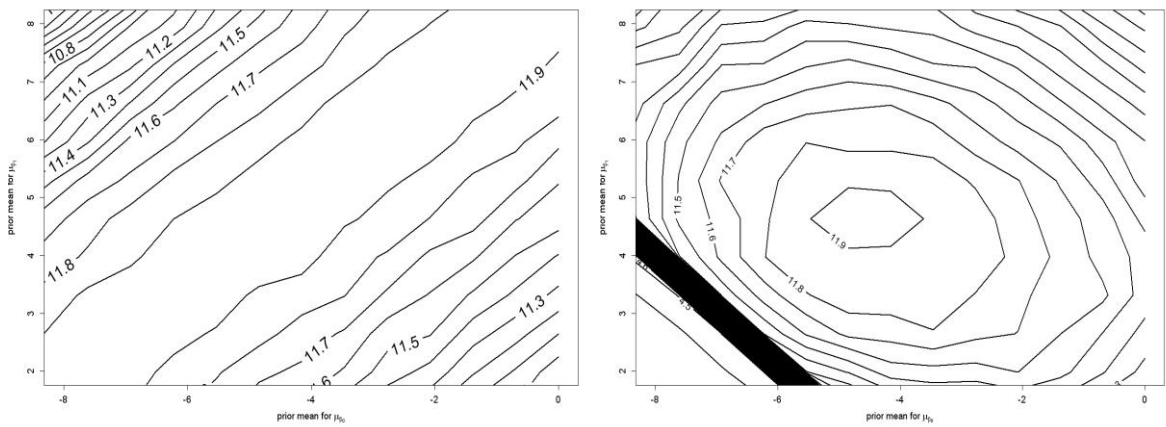


圖 4 在偉能隨機過程下各種  $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t$  所對應的貝氏估計  $\tilde{t}_{0.01}^W$

## 5.2 伽瑪過程

根據先前描述，在偉能隨機過程之下，品質特性在  $\Delta t$  時間內的為增量  $\Delta y$ 。利用本文第三章介紹使用最大概似估計和貝氏估計法，分別求出該產品  $t_p$  的點估計和可信下界。就伽瑪過程而言， $\theta = (\beta_0, \beta_1, \eta)$  的 MLE 為  $(-1.179, 3.142, 5.435)$ ，對應的 p 分位失效時間之 MLE 為  $\hat{t}_p^G = 14.699$ ，藉由自助法估計  $\hat{t}_p^G$  的標準差為 2.042，因此可得  $t_{0.01}$  的 95% 的信賴下界為 10.639，亦即有 95% 的信心可以保證該產品在正常使用 10.639 (千小時)，約略 1.2 年，會有 1% 的產品將無法達到應有的輸出水準。

由於從資料中的變異數共變數矩陣顯示  $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$  兩者之間的相關係數為-0.9，在此一資料分析中，考慮  $(\beta_0, \beta_1)^t$  先驗分布的相關係數為 0 或-0.9。假設先驗分布為  $(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1}\right)^t, \Sigma\right)$  以及  $\eta \sim Gamma(\alpha, \beta)$ ，本章節將在下列四種方案中，分別來探討貝氏估計  $\tilde{t}_{0.01}^G$  及其可信下界  $\tilde{t}_{0.01,L}^G$ 。

方案 1 ( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(-1.179, 3.142\right)^t, \begin{bmatrix} 0.047 & 0 \\ 0 & 0.085 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim Gamma(54.884, 10.087)$$

方案 2 ( $\rho=-0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(-1.179, 3.142\right)^t, \begin{bmatrix} 0.047 & -0.057 \\ -0.057 & 0.085 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim Gamma(54.884, 10.087)$$

方案 3 ( $\rho=0$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left(\left(-1.179, 3.142\right)^t, \begin{bmatrix} 0.470 & 0 \\ 0 & 0.850 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim Gamma(5.484, 1.008)$$

方案 4( $\rho = -0.9$ )

$$(\beta_0, \beta_1)^t \sim BVN\left((-1.179, 3.142)^t, \begin{bmatrix} 0.470 & -0.570 \\ -0.570 & 0.850 \end{bmatrix}\right)$$

$$\eta \sim \text{Gamma}(5.484, 1.008)$$

由表 2 的分析結果得知，當  $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.9$  時，其 DIC 與  $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$  的情形下相仿，因為多一個參數反而增加了計算上的麻煩。此外，貝氏估計  $\tilde{t}_{0.01}^G$  皆大於  $\hat{t}_p^G = 14.699$ 。因此，貝氏方法之下對應產品的保證時間傾向於樂觀。在圖五所示，左圖為  $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = 0$  及右圖為  $\text{Corr}(\beta_0, \beta_1) = -0.9$  都可以得知，當先驗分布的平均數不在原來附近時會造成  $t_p$  估計的影響。

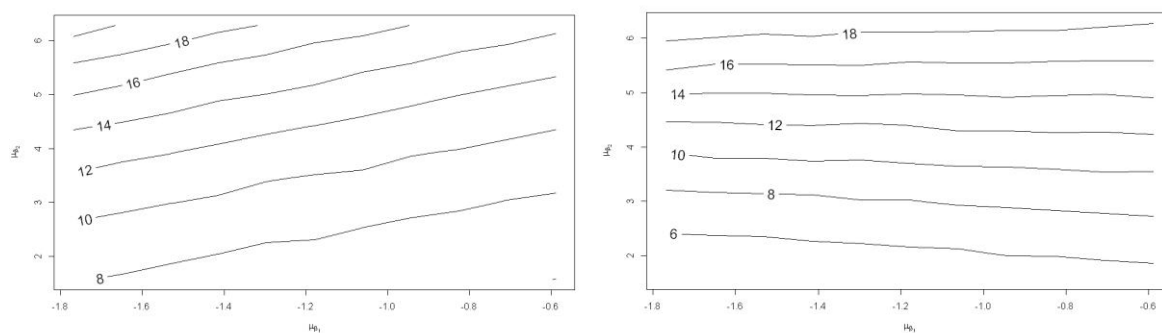


圖 5 在伽瑪隨機過程下各種  $(\mu_{\beta_0}, \mu_{\beta_1})^t$  所對應的貝氏估計  $\tilde{t}_{0.01}^G$

## 第六章 結論與未來方向

本篇論文在加速衰變測試之下，針對衰變的品質特性為偉能與伽瑪隨機過程時，探討在正常使用下會有 $100p\%$ 的產品無法達到預期的效果的 $p$ 分位失效時間 $t_p$ ，遲了一般的最大概似估計，也提出 $t_p$ 的貝氏估計，並求出 $t_p$ 的可信下界，藉此提供的產品的保固期。

從模擬分析中，兩種隨機過程下的變異數增加，都會使 $p$ 分位失效時間減少，而當樣本數增加的時候也確實能夠改善點估計、均方誤差、以及覆蓋機率。另外，使用貝氏估計確實能夠改善點估計、均方誤差，並且保留合理的覆蓋機率，尤其是在樣本數少的時候更能顯示貝氏方法好處。

從資料分析中得知，偉能隨機過程甚至優於伽瑪隨機過程，並且偉能隨機過程與伽瑪隨機過程中的先驗分布 $(\beta_0, \beta_1)'$ 的相關性為時也比相較於相關性為 $-0.9$ 的較佳這些結果其實需要更深入的研究的，事實上，伽瑪是一個特性為非負之右偏分布。或許資料分析中直接考慮更一般性的右偏分布，例如廣義伽瑪分布(Cox, Chu, Schneider, Muñoz, 2007)或是廣義韋伯分布(Xiea, Goha, Tangb, 2004)。

畢竟衰變的品質特性會逐時的增加或減少，其增量是為非負之隨機變數，另外，先驗分布是否可以設定的更為穩健，諸如參數的先驗二維的斜線 $t$ 分布及變異數的先

驗均勻分布等，都是未來可以進一步探究的問題。

## 參考文獻

- Chhikara R. S. and Folks J. L. (1989), "The Inverse Gaussian Distribution: Theory, Methodology and Applications", Marcel Dekker: New York.
- Cox C, Chu H, Schneider MF, Muñoz A "Parametric survival analysis and taxonomy of hazard functions for the generalized gamma distribution", Volume *26*, pp. 4352 - 4374
- Lim H. and Yum B. J. (2011), "Optimal design of accelerated degradation tests based on Wiener process models", *Journal of Applied Statistics*, *38:2*, pp. 309-325
- Meeker W. Q. and Escobar L. A. (1998), "Statistical Methods for Reliability Data." New York: John Wiley & Sons.
- Meeker W. Q. , Escobar L. A. , and Lu C. J. (1998), "Accelerated degradation tests: modeling and analysis." , *Technometrics*, Volume *40*, pp. 89-99.
- Nelson W. (1990), "Accelerated Testing : Statistical Models, Test Plans, and Data analysis." New York: John Wiley and Sons.
- Onar A. and Padgett W. J. (2000), "Accelerated test models with the inverse gaussian distribution" *Journal of Statistical Planning and Inference*, Volume

89 , pp. 119 - 133.

Pan Z. Q. and Balakrishnan N. (2011), "Reliability modeling of degradation of products with multiple performance characteristics based on gamma processes" *Reliability Engineering and System Safety* **96**, pp. 949 - 957.

Park C. and Padgett WJ. (2005) "Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes" . *Lifetime Data Analysis* , Volume **11**, pp. 511 - 527.

Sturtz S., Ligges U., and Gelman A. ( 2005) "R2WinBUGS: A Package for Running WinBUGS from R." *Journal of Statistical Software*, Volume **12**

Wang L. Z., Pan R., Lia X. Y. and Jiang T. M. (2013)" A Bayesian reliability evaluation method with integrated accelerated degradation testing and field information" *Reliability Engineering and System Safety*, Volume **112**, pp. 38 - 47

Whitmore G. A. and Schenkelberg F. (1997), "Modeling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a scale transformation," *Lifetime Data Analysis*, Volume **3**, pp. 27-45.

Xiea M., Goha T. N., Tangb Y. (2004) "On changing points of mean residual life and failure rate function for some generalized Weibull distributions" Re-



liability Engineering and System Safety, Volume *84*, pp. 293 - 299

## 附錄

表一:偉能隨機過程下的資料分析

	相關係數	$\tilde{t}_{0.01}^W$	$\tilde{t}_{0.01,L}^W$	DIC
先驗分布的變異數	$\rho = 0$	11.701	10.201	-447.8
為 MLE 估計	$\rho = -0.9$	11.760	10.246	-447.5
先驗分布變異數為	$\rho = 0$	11.653	9.649	-446.0
MLE 放大 10 倍的估計	$\rho = -0.9$	11.667	9.678	-445.8

表二:伽瑪隨機過程下的資料分析

	相關係數	$\tilde{t}_{0.01}^G$	$\tilde{t}_{0.01,L}^G$	DIC
先驗分布的變異數為	$\rho = 0$	14.928	10.994	-193.9
MLE 估計	$\rho = -0.9$	15.063	10.799	-194.2
先驗分布變異數為	$\rho = 0$	14.972	9.284	-192.0
MLE 放大 10 倍的估計	$\rho = -0.9$	15.227	9.243	-191.8

表三: 3 個應力水準偉能隨機過程之下,  $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Bias	MSE	Distance	Coverage
$\sigma = 0.081$ $t_{0.01} = 15.128$	5	MLE	0.390	3.607	2.373	0.920
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.041	3.257	2.700	0.953
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.048	3.277	2.713	0.953
	10	MLE	0.130	1.647	1.806	0.938
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.098	1.594	2.023	0.959
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.104	1.595	2.031	0.960
$\sigma = 0.092$ $t_{0.01} = 11.884$	5	MLE	0.319	2.269	1.873	0.921
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.012	2.045	2.090	0.952
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.019	2.029	2.078	0.955
	10	MLE	0.111	1.034	1.424	0.937
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.067	0.999	1.580	0.958
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.067	0.996	1.580	0.958
$\sigma = 0.103$ $t_{0.01} = 9.581$	5	MLE	0.254	1.487	1.524	0.923
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.001	1.334	1.648	0.948
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.007	1.331	1.658	0.950
	10	MLE	0.085	0.677	1.160	0.938
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.055	0.650	1.266	0.956
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.058	0.654	1.270	0.955

表四：2 個應力水準偉能隨機過程之下， $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Bias	MSE	Distance	Coverage
$\sigma = 0.081$ $t_{0.01} = 15.128$	5	MLE	0.482	7.963	3.409	0.922
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.252	6.306	3.669	0.956
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.232	6.302	3.694	0.960
	10	MLE	0.122	3.536	2.645	0.930
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.210	3.275	2.708	0.963
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.180	3.238	2.765	0.960
$\sigma = 0.092$ $t_{0.01} = 11.884$	5	MLE	0.374	4.751	2.648	0.925
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.210	3.275	2.708	0.963
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.180	3.238	2.765	0.960
	10	MLE	0.094	2.045	2.045	0.937
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.167	1.952	2.138	0.963
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.148	1.915	2.139	0.962
$\sigma = 0.103$ $t_{0.01} = 9.581$	5	MLE	0.291	3.001	2.123	0.930
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.131	2.407	2.180	0.955
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.115	2.390	2.190	0.949
	10	MLE	0.066	1.315	1.638	0.938
		Bayes( $\rho = 0$ )	-0.131	1.219	1.687	0.963
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	-0.119	1.217	1.688	0.963

表五：3 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Bias	MSE	Distance	Coverage	
$\beta = 6.873$ $t_{0.01} = 20.908$	5	MLE	0.681	32.183	7.128	0.962	
		Bayes( $\rho=0$ )	1.024	33.563	6.517	0.942	
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	1.122	34.198	6.560	0.941	
	10	MLE	0.406	15.431	5.209	0.946	
		Bayes( $\rho=0$ )	0.629	15.957	4.944	0.937	
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.668	16.102	4.965	0.940	
	$\beta = 5.437$ $t_{0.01} = 14.701$	5	MLE	0.526	17.000	5.114	0.962
			Bayes( $\rho=0$ )	0.748	17.653	4.756	0.941
			Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.819	17.957	4.770	0.945
10		MLE	0.313	8.116	3.741	0.945	
		Bayes( $\rho=0$ )	0.452	8.358	3.594	0.938	
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.482	8.433	3.603	0.940	
$\beta = 3.996$ $t_{0.01} = 8.962$		5	MLE	0.356	7.022	3.234	0.956
			Bayes( $\rho=0$ )	0.486	7.292	3.059	0.945
			Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.525	7.357	3.060	0.945
	10	MLE	0.203	3.323	2.374	0.942	
		Bayes( $\rho=0$ )	0.288	3.423	2.306	0.940	
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.301	3.440	2.311	0.940	

表六：3 個應力水準伽瑪隨機過程之下， $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Bias	MSE	Distance	Coverage
$\beta = 6.873$ $t_{0.01} = 20.908$	5	MLE	1.282	49.125	8.048	0.958
		Bayes( $\rho=0$ )	1.508	51.242	7.094	0.924
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	1.644	52.195	7.041	0.926
	10	MLE	0.734	23.095	5.882	0.947
		Bayes( $\rho=0$ )	0.889	23.696	5.625	0.931
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.930	23.931	5.588	0.929
$\beta = 5.437$ $t_{0.01} = 14.701$	5	MLE	0.987	26.575	5.811	0.956
		Bayes( $\rho=0$ )	1.199	27.853	5.244	0.932
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	1.102	27.336	5.321	0.933
	10	MLE	0.564	12.428	4.263	0.946
		Bayes( $\rho=0$ )	0.660	12.700	4.161	0.936
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.690	12.822	4.124	0.932
$\beta = 3.996$ $t_{0.01} = 8.962$	5	MLE	0.676	11.374	3.707	0.957
		Bayes( $\rho=0$ )	0.726	11.538	3.520	0.943
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.796	11.829	3.447	0.937
	10	MLE	0.246	5.059	2.827	0.951
		Bayes( $\rho=0$ )	0.427	5.346	2.729	0.936
		Bayes( $\rho=-0.9$ )	0.448	5.396	2.698	0.937

表七: 3 個應力水準伽瑪隨機過程之下,  $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Median Bias	Median SE	Distance	Coverage
$\beta = 6.873$ $t_{0.01} = 20.908$	5	MLE	0.681	32.183	7.128	0.962
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.422	31.103	6.517	0.942
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.485	31.368	6.560	0.941
	10	MLE	0.406	15.431	5.209	0.946
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.305	15.211	4.944	0.937
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.333	15.288	4.965	0.940
$\beta = 5.437$ $t_{0.01} = 14.701$	5	MLE	0.526	17.000	5.114	0.962
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.306	16.278	4.756	0.941
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.351	16.463	4.770	0.945
	10	MLE	0.313	8.116	3.741	0.945
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.212	7.953	3.594	0.938
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.237	7.995	3.603	0.940
$\beta = 3.996$ $t_{0.01} = 8.962$	5	MLE	0.356	7.022	3.234	0.956
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.194	6.712	3.059	0.945
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.217	6.714	3.060	0.945
	10	MLE	0.203	3.323	2.374	0.942
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.132	3.257	2.306	0.940
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.142	3.265	2.311	0.940



表八: 3 個應力水準伽瑪隨機過程之下,  $t_p$  評估的偏誤和均方差及真值與區間或可信下

界之距離( $t_{0.01} - \hat{t}_{0.01,L}$  或者  $t_{0.01} - \tilde{t}_{0.01,L}$ )和區間或可信下界之覆蓋率

Model	# of Item	Method	Median Bias	Median SE	Distance	Coverage
$\beta = 6.873$ $t_{0.01} = 20.908$	5	MLE	1.282	49.125	8.048	0.958
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.784	46.656	7.094	0.924
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.882	47.209	7.041	0.926
	10	MLE	0.734	23.095	5.882	0.947
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.492	22.402	5.625	0.931
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.522	22.518	5.588	0.929
$\beta = 5.437$ $t_{0.01} = 14.701$	5	MLE	0.987	26.575	5.811	0.956
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.625	25.058	5.244	0.932
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.555	24.749	5.321	0.933
	10	MLE	0.564	12.428	4.263	0.946
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.362	11.957	4.161	0.936
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.381	12.038	4.124	0.932
$\beta = 3.996$ $t_{0.01} = 8.962$	5	MLE	0.676	11.374	3.707	0.957
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.356	10.415	3.520	0.943
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.409	10.573	3.447	0.937
	10	MLE	0.246	5.059	2.827	0.951
		Bayes( $\rho = 0$ )	0.226	5.028	2.729	0.936
		Bayes( $\rho = -0.9$ )	0.241	5.057	2.698	0.937